13-10-14.

Ένας αλγόριθμος λέγεται <u>ευσταθής</u> αν μικρά σφάλματα κατά τους υπολογισμούς επιφέρουν σχετικά μικρά σφάλματα στο αποτέλεσμα. Αλλιώς λέγεται <u>ασταθής</u>.

<u>Παράδειγμα</u>: Θέλουμε να υπολογίσουμε το e^x όταν $x<0$, υπολογίζουμε το άθροισμα $\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$. Η ποσότητα αυτή προσεγγίζει πολύ καλά τη σειρά $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

<u>Θεωρώ</u> $x=-12.5$ και υπολογ. το μερ. άθροισμα $\sum_{i=0}^{34} \frac{x^i}{i!}$, όπου επιλέχθε σύγκλιση σε υπολογιστή με απλή ακρίβεια - $t=7$ (σημαντικά ψηφία), $b=10$.

<u>Αποτέλεσμα</u>: $.162916 \times 10^{-2}$

<u>Ακριβής τιμή</u>: $e^{-12.5} = .372665 \times 10^{-5}$ Τι συνέβη?

Οι όροι της σειράς:

1, −12.5, 78.125, −325.5208, ...

Η ακολουθία των όρων είναι <u>αύξουσα</u> στην αρχή μέχρι τον <u>13</u> όρο. Ο όρος αυτός είναι της τάξης της $5^{ης}$ ακέραιας θέσης:

xxxxx.xx Μόνο για την καταχώρηση του $13^{ου}$ όρου έχουμε σφάλμα της τάξης 10^{-2}. Αυτό παραμένει στο <u>άθροισμα</u>.

Το αποτέλεσμα του $\sum_{i=1}^{34} \frac{(-12.5)^i}{i!}$ είναι ολόκληρο ένα <u>σφάλμα</u>.

"Καταστροφική αναίρεση σημαντικών ψηφίων".

$e^x = (e^{-x})^{-1} = \frac{1}{e^{-x}}$. Υπολογίζω το $\sum_{i=0}^{34} \frac{(12.5)^i}{i!} = y$. Και επί συνέχεια $e^x \approx \frac{1}{y}$. Βρίσκω το <u>ακριβές</u> αποτέλεσμα με ακρίβεια 5 σημαντικών ψηφίων. <u>Ευσταθής</u> αλγόριθμος.

2ο Κεφάλαιο: Επίλυση Αλγεβρικών εξισώσεων.

Πρόβλημα: Δοθείσης μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να βρούμε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

Χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους διότι:

1) Σε πολλά προβλήματα δεν έχουν αναλυτική έκφραση της f ή είναι πολύπλοκη.

2) Σε πολύ λίγες περιπτώσεις έχουμε τύπους αναλυτικών εκφράσεων των ριζών ακόμη και αν η f είναι πολυώνυμο.

Π.χ. $f = x^2 - e^x$ (δε μπορούμε να πούμε ποιές είναι οι ρίζες της εξ/σ)

⚠ Σε πολυώνυμα αναλ. έκφραση μέχρι 4ου βαθμού.

Οι αριθμητικές μέθοδοι συνίστανται στην κατασκευή μιας ακολουθίας αριθμών $x_0, x_1, x_2, \dots$ τέτοια ώστε αν συγκλίνει να συγκλίνει σε μια ρίζα x^* της $f(x)=0$.

$f \in C(I)$ αν η f είναι συνεχής στο διάστημα I.

$f \in C^n(I)$ αν η f είναι ν φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο I.

Αν $I = [a,b]$, τότε αντί $C([a,b]) = C[a,b]$

Μέθοδος Διχοτόμησης

Δίνεται η f ορισμένη στο διάστημα $I=[a,b]$ και συνεχής στο I, με $sgn f(a) \neq sgn f(b)$, δηλαδή $f(a)\cdot f(b) \leq 0$. Να βρεθεί μια ρίζα $x^* \in I$. $f(x)=0$.

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής $\exists$ ρίζα $x^* \in I$.

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \\ -1, & \text{αν } x<0 \end{cases}$$

Αν $f(a)=0$ ή $f(b)=0$ τότε a ή $b \in I$ είναι ρίζες της $f(x)=0$.

Αν $f(a)\cdot f(b)<0$ τότε $\exists$ x^* στο ανοιχτό διάστημα του I, άρα $x^* \in I$.

Έστω $f(a)\cdot f(b)<0$

Υπολογίζουμε τα $c=\frac{a+b}{2}$ και το $f(c)$.

Τότε αν $\operatorname{sgn} f(i) \neq \operatorname{sgn} f(a) \Rightarrow x^* \in [a,i]$

αν $f(i)=0$ το $x^*=i$. Τέλος.

Αλλιώς (αν $\operatorname{sgn} f(i) \neq \operatorname{sgn} f(b)$) τότε $x^* \in [i,b]$.

Εντοπίσαμε στο μισό διάστημα τη ρίζα.

Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία θεωρώντας το υποδιάστημα που ανήκει η ρίζα ως $[a,b]$.

Ονομάζω με $I_1=[a,b]=[a_1,b_1]$

Κατασκευάζουμε μια ακολουθία υποδιαστημάτων $I_i=[a_i,b_i]$ $i\in\mathbb{N}$ όπου $x^*\in I_i$, $i\in\mathbb{N}$. Επίσης $I_{i+1}\subset I_i$.

Θεωρούμε την ακολουθία (x_i), $i\in\mathbb{N}$ των μέσων των διαστημάτων I_i. Η ακολουθία συγκλίνει πάντα σε μια ρίζα $x^*\in I$.

- $$b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\frac{b_{n-2}-a_{n-2}}{2^2}=\dots=\frac{b_2-a_1}{2^{n-1}}=\frac{b-a}{2^{n-1}}$$

$$|x_n-x^*|\le\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^n}.$$

Η ακολουθία $|x_n-x^*|$ είναι μηδενική. Επομένως $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$.

Πλεονεκτήματα

1) Πολύ απλή.
2) Συγκλίνει πάντα.
3) Απαιτείται μόνο ένας υπολ. της συνάρτησης/βήμα.
4) Γνωστός εκ των προτέρων ο αριθμός επαναλήψεων.

Μειονεκτήματα.

1) Είναι πολύ αργή μέθοδος.
2) Χρησιμοποιείται κυρίως για τον εντοπισμό διαστήματος που βρίσκεται η ρίζα και ακολουθεί άλλη μέθοδος.

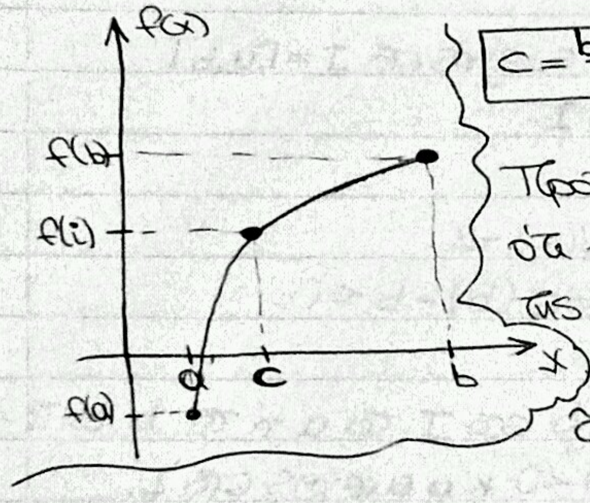
Έστω ε το ανεκτό σφάλμα.

Θέλουμε $|x_n - x^*| \le \varepsilon$.

Γνωρίζουμε ότι $|x_n - x^*| \le \frac{b-a}{2^n}$

Αρκεί $\frac{b-a}{2^n} \le \varepsilon \Leftrightarrow 2^n \ge \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow n\log 2 \ge \log\left(\frac{b-a}{2}\right) \Leftrightarrow$

$n \ge \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)/\log 2$ Το μικρότερο δυνατό n έστω $|x_n - x^*| \le \varepsilon$ είναι $n = \lceil \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)/\log 2 \rceil$ άνω ακέραιο μέρος



$$\boxed{c = \frac{b+a}{2} = a + \frac{b-a}{2}}$$

Προτιμούμε να υπολογίσουμε το $a + \frac{b-a}{2}$. Έστω ότι έχω υπολογιστή με $t=2$ σε κάποιο βήμα της μεθόδου έχω $a = .51$, $b = .53$ με τον τύπο $c = \frac{b+a}{2}$ έχουμε $c = fl\left(\frac{fl(b+a)}{2}\right) = fl\left(\frac{fl(1.04)}{2}\right) = fl\left(\frac{1.0}{2}\right)$

$= 0.5 \notin I = [0.51, 0.53]$

Με τον τύπο $c = a + \frac{b-a}{2}$

$$c = fl\left(a + fl\left(\frac{fl(b-a)}{2}\right)\right) = fl\left(.51 + fl\left(\frac{0.02}{2}\right)\right) = fl(.51 + .01) = .52$$

Παρατήρηση.

Χρησιμοποιούμε sgn $f(a)$ κ' sgn $f(b)$. Και όχι $f(a)\cdot f(b)$ διότι κατά σύγκλιση $f(a)$ κ' $f(b)$ είναι πολύ κοντά στο 0. Τότε $f(a)\cdot f(b)$ μπορεί να στρογγυλευθεί με 0.

Επαναληπτική μέθοδος.

Δοθείσης $f \in C(I)$ να βρεθεί ρίζα x^* της $f(x) = 0$.

Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε ισοδύναμο πρόβλημα σταθερού σημείου, δηλ. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$.

Αυτό γίνεται κατά πολλούς τρόπους. Η $x = \varphi(x)$ μας οδηγεί στο επαν. αλγόριθμο $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Αν συγκλίνει ο αλγόριθμος αυτός θα συγκλίνει στη x^*.

$y=\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \varphi(y) \iff f(y)=0$, άρα $y=x^*$ ρίζα

<u>Ορισμός</u>: Η συνάρτηση $\varphi \in C(I)$ τηρεί τη συνθήκη lipschitz στο I αν $\forall\, x,y \in I$ ισχύει:

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le C|x-y| \quad ,C>0.$$

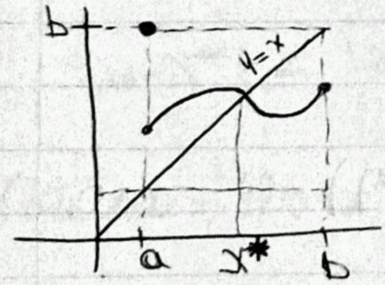
Αν $C<1$, τότε λέμε ότι η φ είναι <u>συστολή</u> στο I.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\varphi: [a,b]\to[a,b]$ συνεχής στο $I=[a,b]$.
Τότε $\exists$ ρίζα x^* της $x=\varphi(x)$ στο I.

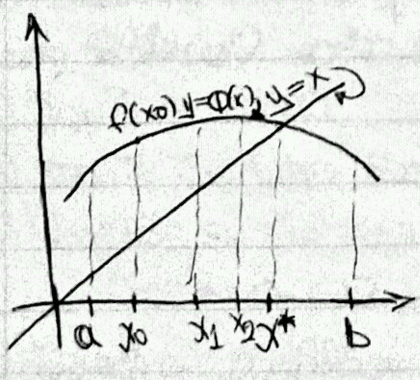
<u>Απόδειξη</u>.

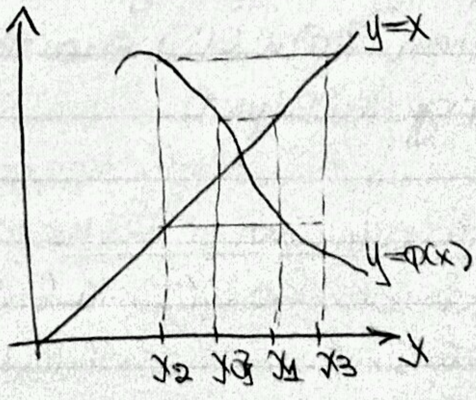
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\varphi(x)-x$
τότε $g(a)=\varphi(a)-a\ge 0$, $g(b)=\varphi(b)-b\le 0$.

Αν $g(a)=0$ ή $g(b)=0$ τότε $\exists$ ρίζα στο I το a ή το b, αντίστοιχα. Αλλιώς έχουμε: $g(a)\cdot g(b)<0$ κ' g συνεχής στο I. Από το θ. Ενδιάμεσης Τιμής $\exists\, x^*\in I$: $x^*=\varphi(x^*)$.



Γεωμ. ερμηνεία της μεθόδου.





$x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n=0,1,2,\dots$, $x_0\in I$.